数学科普 · 三角函数

单位圆

一个半径为一的圆，如何装下整个三角函数

约 3,100 字 | 阅读约 8 分钟 | 图 3 幅 · 表 2 张

> 三角函数大概是中学数学里公式最多的一章：诱导公式、和角公式、倍角公式，名字都记不过来。可如果顺着这些公式往回找，会发现它们几乎都源自同一个图形——一个圆心在原点、半径恰好为 1 的圆。这篇文章不讲题，只讲图：把这个圆看清楚，三角函数就会从“需要背的一堆表”，变成“一台可以转动的机器”。

一、先看一个“什么都没有”的圆

在平面直角坐标系里，以原点 O 为圆心、1 为半径画一个圆，就得到单位圆。它的方程简单得不能再简单：

$$x^2 + y^2 = 1$$

圆上任意一点到原点的距离都是 1，这正是“单位”两个字的全部含义。圆与坐标轴的四个交点像四个路标：$(1, 0)$、$(0, 1)$、$(-1, 0)$、$(0, -1)$，后面许多结论都能从这四个点一眼看出。

乍看之下，这个圆似乎什么也没有：没有面积公式，没有切线，甚至连个角度都看不见。可它其实是三角函数的出生地——所有的正弦、余弦、正切，最初都是从这个圆上量出来的。

二、把角放进圆里

要用这个圆，先得把“角”放进去。

约定是这样的：角的顶点放在圆心 O，始边与 x 轴正半轴重合，逆时针方向为正。角 θ 的终边与单位圆交于唯一一点 P。于是每一个角都对应圆上的一个点；反过来，圆上每个点也都对应一族相差 360° 的角。

这个约定立刻带来两个好处。**其一，转一圈回到原处。**θ 和 θ + 360° 的终边完全重合，落在同一个点 P 上。三角函数为什么以 2π 为周期？答案就在这里，不需要任何推导。

其二，角不再有上限。70°、430°、−290° 都能在圆上找到位置，所以三角函数可以对任意角定义，而不只是直角三角形里的锐角。这正好补上了初中几何留下的一个缺口：三角形里装不下 90° 以上的角，可现实中的旋转远不止于此。

三、横坐标与纵坐标：cos 和 sin 的出生地

定义只有一句话：

若角 θ 的终边与单位圆交于点 P(x, y)，则 cos θ = x，sin θ = y。

这句话不是推导出来的，而是规定——它是整个三角学的地基，剩下的公式都是在这块地基上长出来的。

它与初中的“对边比斜边”并不矛盾，只是同一件事的另一种说法。从 P 向 x 轴作垂线，垂足为 M，就得到一个直角三角形 OMP（见图 1）：斜边 OP 是半径，长度为 1；∠POM 就是 θ。于是

$$\sin\theta = \text{对边}/\text{斜边} = PM/OP = PM = y$$

$$\cos\theta = \text{邻边}/\text{斜边} = OM/OP = OM = x$$

斜边等于 1，除法就自动消失了：正弦就是“高”，余弦就是“底”。单位圆最妙的地方正在于此——它把“比值”变回了“长度”，让三角函数变成可以直接用尺子量的东西。

顺带说，$\tan\theta = y/x = \sin\theta/\cos\theta$，几何意义是终边的斜率。还有一个不常被提起的解释：在 (1, 0) 处作圆的切线，让它与终边相交于点 T，那么 T 的纵坐标恰好就是 tan θ。这条切线（tangent）也正是 tan 这个名字的来源。

> **小知识　正弦的名字**
>
> “正弦”这个名字其实是一场翻译事故。印度数学家把半弦长称作 jya，阿拉伯学者把它音译成 jayb，意思是“衣襟、凹处”；欧洲人再译成拉丁语 sinus，还是“凹处”的意思。英语 sine 就是从 sinus 演变来的。至于 cosine，原词是 complementi sinus——“余角的正弦”，念快了就缩成了 co-sinus。

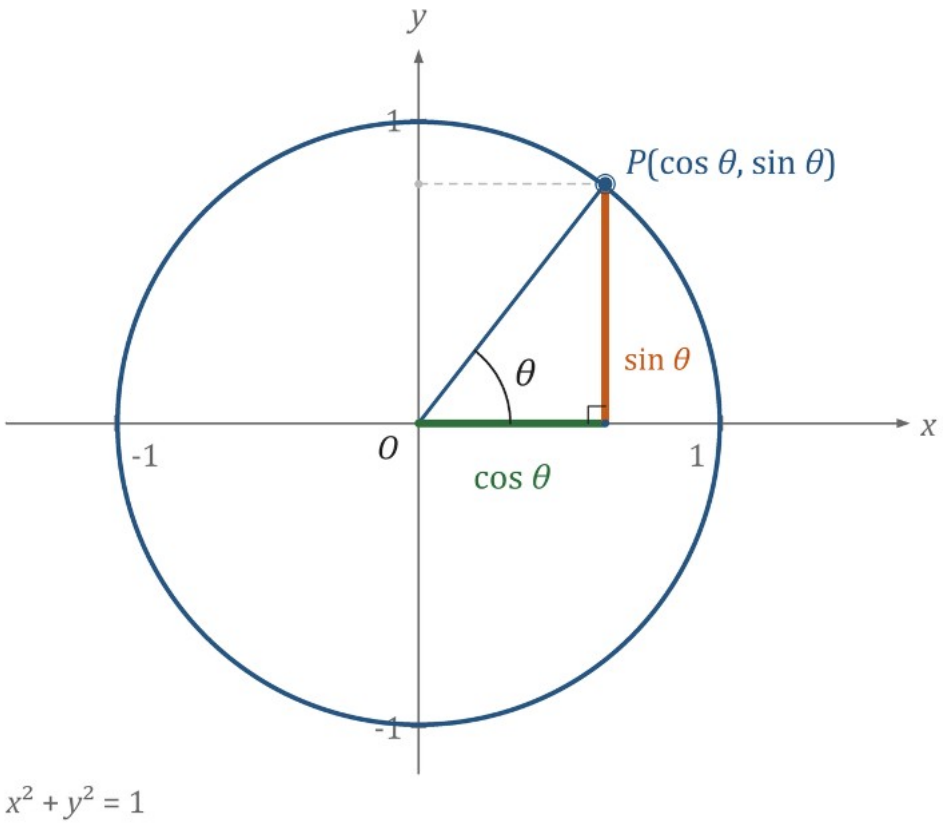


图 1　单位圆的定义。角 θ 的终边与圆交于点 P，P 的横坐标就是 cos θ，纵坐标就是 sin θ。

四、弧度：用圆自己的尺子量角

角度制里的 360 是个“外来户”：它来自古巴比伦的六十进制，和圆本身没有关系。数学家更喜欢用圆自己的尺子来量角，这把尺子就是半径。

定义是：**弧长恰好等于半径**时，这段弧所对的圆心角就是 1 弧度（rad）。

单位圆的半径是 1，所以弧长的数值就等于圆心角的弧度数（图 2）。绕圆一周，弧长是 $2\pi \approx 6.283$，于是 2π 弧度 $= 360°$；半个圆是 π 弧度 $= 180°$；1 弧度 $\approx 57.2958°$。

用弧度有什么好处？好处全在公式里：弧长 $s = r\theta$，扇形面积 $S = \tfrac{1}{2}r^2\theta$，正弦函数的导数 $(\sin x)' = \cos x$——这些漂亮的式子只在弧度制下成立。换成角度制，导数公式前面就得挂一个 $\pi/180$ 的零碎系数。

顺带一提，工程上至今仍偏爱角度制，因为 360 的因数特别多（2、3、4、5、6、8、9、10、12……），把直角和圆周等分起来格外方便。弧度制胜在公式简洁，两者各有各的用处：做题和推导用弧度，看图纸和报方位用角度。

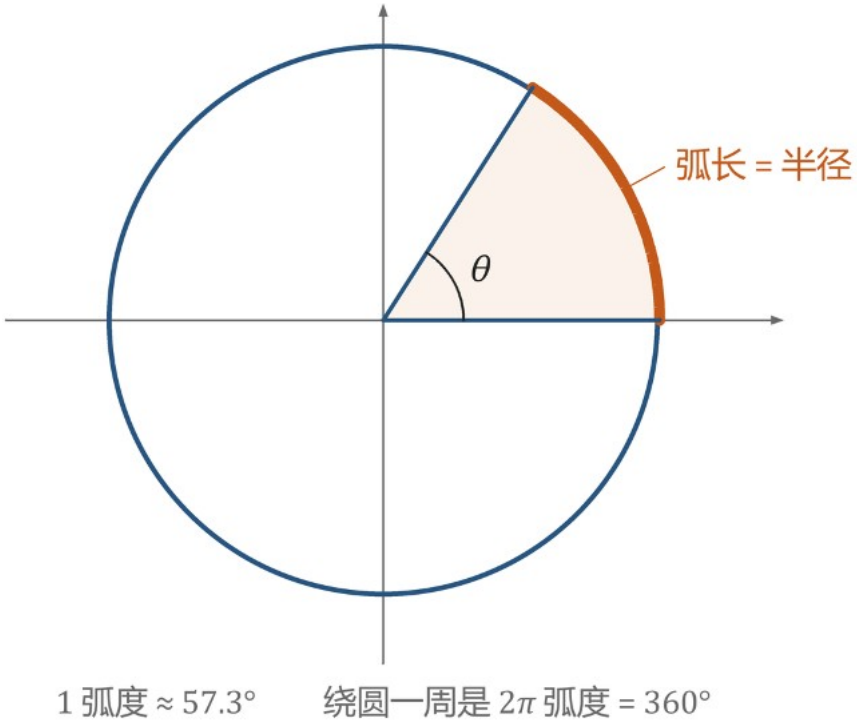


图 2　弧度就是“拿半径去量弧”：弧长等于半径时，张开的角是 1 弧度，约 57.3°。

所以弧度制不是“另一种记法”，而是让三角函数回到了它本来的尺度：角本质上是一个“弧长与半径之比”，本来就没有单位。

五、一台永不停机的“函数制造机”

现在把单位圆看成一台机器：输入一个角 θ，输出两个数 (cos θ, sin θ)。这台机器的几个性质，全都能从图上直接“看”出来，不用背。

有界。点在半径为 1 的圆上，坐标当然跑不出 [−1, 1]。所以 $|\sin\theta| \le 1$、$|\cos\theta| \le 1$ 一目了然；tan θ 则在 90°、270° 处因为 $x = 0$ 而无定义——那里的终边是竖直的，斜率趋于无穷。

周期。转一圈回到原处，θ 与 $\theta + 2\pi$ 给出同一个点，所以 sin 和 cos 的周期是 2π（360°），tan 的周期是 π（180°）。

对称。这是最能体现单位圆价值的部分：所谓“诱导公式”，不过是把点挪到对称位置，再看坐标怎么变。

关于 x 轴翻折：$\sin(-\theta) = -\sin\theta$，$\cos(-\theta) = \cos\theta$。

关于 y 轴翻折：$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$，$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$。

关于原点中心对称：$\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$，$\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$。

旋转 90°：$\sin(\theta + \pi/2) = \cos\theta$，$\cos(\theta + \pi/2) = -\sin\theta$。

把这些性质按象限整理，就是每个学生都见过的那张符号表：

象限	角的范围	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$\tan\theta$
第一	0° ~ 90°	+	+	+
第二	90° ~ 180°	−	+	−
第三	180° ~ 270°	−	−	+
第四	270° ~ 360°	+	−	−

“一全正、二正弦、三正切、四余弦”这句口诀，说的就是这张表；而这张表，说的就是这个圆。

举个例子：不用计算器求 $\sin 150°$。150° 的终边与 30° 的终边关于 y 轴对称，两点纵坐标相同，所以 $\sin 150° = \sin 30° = 1/2$。整个过程没有公式，只有一眼。

六、特殊角速查：一张表看完全圆

第一象限的五个角值得记牢，其余三个象限都能靠对称推出来。下面这张表把 0° 到 360° 的常用角一次列全，需要时查表即可。

角度	弧度	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°	0	0	1	0
30°	$\pi/6$	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	不存在
120°	$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$
135°	$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	−1
150°	$5\pi/6$	1/2	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$
180°	π	0	−1	0
210°	$7\pi/6$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
225°	$5\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	1
240°	$4\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$\sqrt{3}$
270°	$3\pi/2$	−1	0	不存在
300°	$5\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	1/2	$-\sqrt{3}$
315°	$7\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	−1
330°	$11\pi/6$	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$
360°	2π	0	1	0

规律藏在表里：sin 的分子依次是 √0、√1、√2、√3、√4，分母都是 2。0°、30°、45°、60°、90° 的正弦依次是 0、1/2、√2/2、√3/2、1；余弦正好反着来。

七、把圆展开：正弦曲线的来历

到这里，单位圆还是“静态”的。让它转起来，会看到更有意思的东西。

设想点 P 从 (1, 0) 出发，沿圆逆时针匀速转动。盯着它的高度看：一开始是 0，转到 90° 时升到最高 1，转到 180° 又回到 0，转到 270° 落到最低 −1，转满一圈回到 0。把这个高度随角度变化的记录铺在纸上——横轴是角度，纵轴是高度——得到的就是正弦曲线（图 3）。

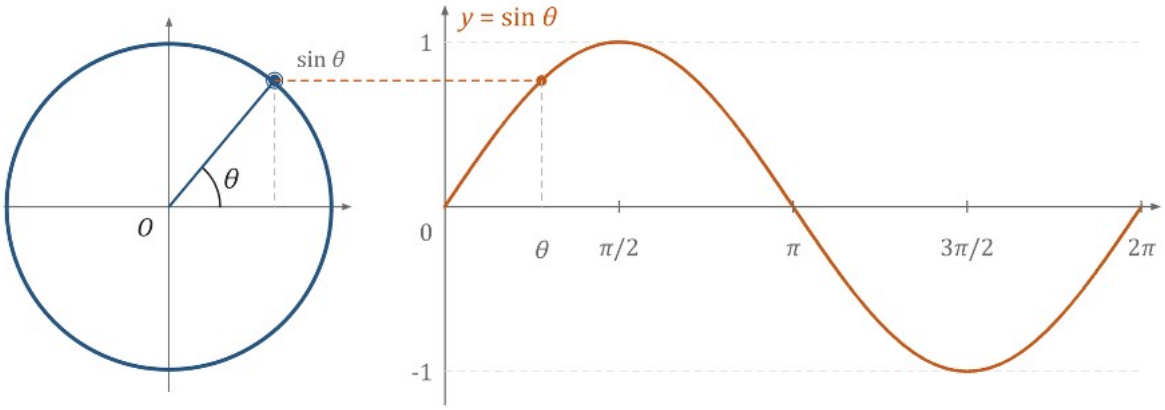


图 3　让点 P 在圆上匀速转动，把它每一刻的高度按角度铺开，就得到正弦曲线 y = sin θ。

反过来看也成立：把一条正弦曲线卷起来，就会得到单位圆。这正是“正弦波”与“圆”之间那层隐秘的关系——圆是卷起来的波，波是展开的圆。它也顺手解释了正弦曲线的两个特征：为什么以 2π 为周期（圆转一圈就重复），为什么值域是 [−1, 1]（圆上的点跑不出这个高度）。

用参数方程写下来，就是 $x = \cos\theta$，$y = \sin\theta$。两式平方相加，θ 被消掉，得到 $x^2 + y^2 = 1$——又绕回了单位圆本身。

八、再进一步：欧拉公式与旋转

如果把平面看成复平面——横轴是实部，纵轴是虚部——那么单位圆上的点，恰好就是“模为 1 的复数”。于是可以写下一个被许多人称作“最美公式”的关系：

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$\theta = \pi$ 时，它变成 $e^{i\pi} = -1$，也就是 $e^{i\pi} + 1 = 0$。

这个式子说的是：单位圆上的点可以用指数来标记，而乘以 $e^{i\theta}$ 的几何意义就是“旋转 θ 角”。乘以 i 就是逆时针转 90°，乘两次 i 就是转 180°——等于乘以 -1，这正是 $i^2 = -1$ 的几何解释。

所以单位圆还有一个身份：它是“旋转”这件事的数学化身。计算机图形学里的旋转矩阵，四个元素正是 $\cos\theta$、$-\sin\theta$、$\sin\theta$、$\cos\theta$——把它们摆成一个 2×2 的方阵，就是让整个平面绕着原点转 θ 角的操作。

九、它藏在你身边的哪些地方

单位圆不只是课堂上的图形，它渗进了现代技术的很多角落。

声音与图像。傅里叶分析把一段声音或一张图片拆成无数条不同频率的正弦波，而正弦波就是“展开的单位圆”。MP3 压缩音乐、JPEG 压缩图片，背后都有它的影子。

游戏与动画。角色转身、镜头环绕、物体自转，底层都是旋转矩阵；而旋转矩阵的每一行，都是从单位圆上取下来的 cos 和 sin。

电力系统。交流电的电压和电流按正弦规律变化，工程师用“相量图”计算它们的关系——那张图，就是一个匀速转动的圆。

机械与生活。钟表的指针、摩天轮、风扇叶片、曲柄连杆机构，运动轨迹都能用圆上的点来描述；航海与航空里的方位角，也是从正北方向起、绕圈计量的角。

数学本身。从傅里叶级数到量子力学里的相位，凡是有“波”的地方，几乎都能找到这个圆。

十、动手试试：三道小题

（1）不查表，求 $\sin 210°$ 和 $\cos 300°$ 的值。

（2）为什么 $\tan 90°$ 不存在？请在单位圆上找到理由。

（3）已知点 P 在单位圆上，且 $\sin\theta = 0.6$。$\cos\theta$ 可能是多少？有几种情况？

答：210° 的终边在第三象限，与 30° 的终边关于原点对称，所以 $\sin 210° = -\sin 30° = -1/2$；300° 的终边在第四象限，与 60° 的终边关于 x 轴对称，所以 $\cos 300° = \cos 60° = 1/2$。

答：90° 的终边与圆交于 $(0, 1)$，此时 $x = 0$，而 $\tan\theta = y/x$ 的分母为零。几何上，这条终边是竖直的，与 $(1, 0)$ 处的切线平行，交点 T 跑到无穷远处。

答：$\sin\theta = 0.6$ 说明 P 的纵坐标是 0.6，横坐标满足 $x^2 = 1 - 0.36 = 0.64$，所以 $x = \pm 0.8$。P 可能在第一象限（$\cos\theta = 0.8$），也可能在第二象限（$\cos\theta = -0.8$），两种情况都成立。

结语：简单，所以强大

回头看，单位圆只做了一件事：把角变成点。可就是这一步，让角度、坐标、比值、周期、对称、旋转、复数、波，全都接到了一起。

数学里很多深刻的东西都是这样：定义简单到近乎无话可说，推论却丰富到一辈子学不完。单位圆就是这样一个例子——它不复杂，它只是恰好站在了许多条路的交汇处。

下次再看到一长串三角公式，不妨先在心里画一个半径为一的圆。绝大多数时候，答案就在那个圆上。

> **三个最容易踩的坑**
>
> 只背数值，不看象限：$\sin 30° = 1/2$，可 $\sin 150°$ 也是 $1/2$。先看点在哪个象限、和谁对称，再决定符号。
>
> 把“$\pi/6$ 弧度”读成“6 弧度”：$\pi/6 \approx 0.52$ 弧度，约 $30°$；π 是 3.14 左右，不是 180。
>
> 写“$\tan 90° =$ 无穷大”：它其实是不存在。此时 $\cos 90° = 0$，分母为零，等号根本写不出来。

> **随身小抄**
>
> · 定义：$P(x, y)$ 在单位圆上，则 $\cos\theta = x$，$\sin\theta = y$，$\tan\theta = y/x$。
>
> · 平方关系：$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$。
>
> · 换算：$180° = \pi$ 弧度；1 弧度 $\approx 57.3°$。
>
> · 周期：sin、cos 为 2π；tan 为 π。
>
> · 对称：$\sin(-\theta) = -\sin\theta$，$\cos(-\theta) = \cos\theta$；$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$，$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$。
>
> · 特殊值：$\sin 30° = 1/2$，$\sin 45° = \sqrt{2}/2$，$\sin 60° = \sqrt{3}/2$。

延伸阅读：3Blue1Brown 的《三角学基础》系列视频，用动画把单位圆讲得很直观；也可以拿一张方格纸，自己画一个单位圆，把 30°、45°、60° 的点标出来，再量一量它们的横纵坐标。